WAS IST TOPOLOGIE?

Aspekte der Topologie im MU und darüber hinaus

Hans-Christian Reichel, Wien

§ 1. EINLEITUNG

Das 1847 von J.B. Listing geprägte Wort "Topologie" (topos, gr. = Ort, Lage) faßt heute ein sehr umfangreiches Gebiet der Mathematik zusammen, dessen Methoden in die meisten anderen Gebiete (wie etwa Analysis, Algebra, Geometrie, Kombinatorik, etc.) mehr oder weniger weit hineinreichen, und welches umgekehrt von diesen vielfach befruchtet wird. Wie jedes andere Gebiet besitzt es mehrere Begründer und vielerlei "Wurzeln", z.B. die Entstehung des Mengenbegriffes und die Entwicklung der Mengenlehre (G. Cantor, M. Fréchet, F. Hausdorff, L. Brouwer, K. Menger, K. Kuratowski, R.L. Moore, u.a.), geometrische und differential-geometrische Aspekte, ferner die Entwicklung der modernen Axiomatik (D. Hilbert), die Frage nach einem "Dimensionsbegriff" (siehe z.B. [6]) und vor allem B. Riemanns Beiträge zur komplexen Funktionentheorie (Riemannsche Flächen!), die Entwicklung des Begriffes der "differenzierbaren Mannigfaltigkeit" (H. Poincaré) und - im weitesten Sinn - die sogenannte "analysis situs" des 18. und 19. Jahrhunderts. Daneben wären noch weitere "Wurzeln" zu nennen: etwa die Eulersche Polyederformel, ferner graphentheoretische Probleme wie das "Königsberger Brückenproblem", oder die erst jüngst positiv gelöste "Vierfarbenvermutung", u.a.m.

Ebenfalls mit vielen anderen Gebieten teilt sich die Topologie die Eigenschaft, heute vielfach anders auszusehen als in der Zeit der Entstehung. Die oft relativ klaren und intuitiven historischen "Einstiege" sind durch "technisches Beiwerk verschüttet" und vor allem auch durch den Zwang, möglichst rasch zu den wichtigen und modernen Fragestellungen und Methoden zu gelangen. (Dies gilt vor allem für die sogenannte "algebraische Topologie".)*) Wie sich die Topologie heute darstellt, besteht sie im wesentlichen aus 2 von einander recht unabhängigen Teilen: der allgemeinen (= mengentheoretischen) und der algebraischen Topologie, beides Gebiete, die sowohl als eigenständige, sich rasch entwickelnde Forschungsgebiete große Bedeutung besitzen, als auch als Grundlage für die moderne Analysis. Kaum eine Analysis-Vorlesung kommt heute ohne topologische Begriffe und Methoden aus, und in fast allen Ländern enthalten die Studienordnungen Topologie-Vorlesungen als unentbehrliche "Hauptvorlesungen". Neben den algebraischen und den Ordnungsstrukturen zählt Bourbaki die topologischen zu den Grundstrukturen der Mathematik (siehe § 3). Die Forschungen der letzten Jahre zeigen auch wichtige Verbindungen der mengentheoretischen Topologie zu den Grundlagen der Mathematik (im Sinne der Logistik): viele Unabhängigkeits- und Konsistenzbeweise treten heute in einem "topologischen Kleid" auf.

Schon nach diesen wenigen und sehr allgemein gehaltenen Worten scheint eine seriöse Beantwortung unserer Frage auf wenigen Seiten kaum möglich zu sein (in [1] sind z.B. fast 100 mehr oder weniger zum "Standard" gehörige Bücher zitiert, wobei die neuere algebraische Topologie noch sehr knapp wegkommt). Ich hoffe aber, daß es gelingt, einen einfachen und - in gewisser Weise - auch schulmathematisch relevanten Einstieg in grundlegende Aspekte der Topologie zu geben. Und wenn auch naturgemäß die allerneuesten Entwicklungen stiefmütterlich

*)Typisch hiefür ist z.B. im Schulbereich schon die Tatsache, daß heute vielfach anstelle des (historisch primären) Umgebungsbegriffe die eher "technischen" Begriffe "offene" und "abgeschlossene" Menge an die Spitze eines Topologiekurses gestellt werden. Aufgefaßt als fundamentale Begriffe der Topologie mag dies so manchen Schluß oder Beweis "technisch rationalisieren", doch geht dafür meist die ursprünglich oft intuitiv-anschauliche Stringenz vieler Konzepte verloren (z.B.Stetigkeit!). Vgl. §§ 3.1 und 5.

behandelt werden, so sollen diese Zeilen doch zumindest helfen, die "Anfangshürde" bei der Lektüre anderer Artikel ähnlicher Zielsetzung zu erleichtern (vgl. z.B. die Stichwortartikel im Fischer-Lexikon, DTV-Atlas, in [2],[3] oder - schon wesentlich schwieriger - im "Encyclopedic Dictionary of Mathematics", MIT-Press Cambridge).

Fast alle Gebiete der Mathematik sind ursprünglich aus dem Bestreben entstanden, "exakte" und gesicherte Aussagen über Begriffe, Phänomene und Zusammenhänge zu gewinnen, die - kurz gesagt - in der Praxis auftreten (z.B. Zahlen, geometrische Gebilde wie Punkt, Gerade, Parallele, etc., Flächen- und Rauminhalt, Wahrscheinlichkeit, Zufall, gewisse - offenbar gesetzmäßige - Beziehungen zwischen den Lösungen gewisser Gleichungen u.a.m.). Alle diese Begriffe haben einen gewissen intuitiven Gehalt und bedürfen für die allereinfachsten Aussagen über sie keiner weiteren "Exaktifizierung". Dies ändert sich jedoch sehr rasch, sobald die Aussagen komplexer werden und jedenfalls dann, wenn man "Beweise" wünscht. Unter einem Beweis einer Aussage A versteht man dabei - grob gesagt - die durch allgemein anerkannte, sozusagen "erlaubte" Denk- und Schlußregeln durchgeführte Rückführung (= Umformung) dieser Aussage bzw. Behauptung auf eine andere, welche entweder bereits vorher bewiesen wurde, oder die aus sonst einem Grunde als gültig angesehen wird (z.B. ein Axiom). Beweisführungen sind in diesem Sinn nur innerhalb gewisser Begriffssysteme (Axiomensysteme) und bei festgelegten Schlußregeln möglich. Um also mit einem bestimmten Begriff (im mathematischen Sinn) wissenschaftlich arbeiten zu können, bedarf es einer Definition, d.h. einer "Verankerung" innerhalb eines gewissen Begriffs- bzw. Axiomensystems. Dies ist in der Regel auf verschiedene Weisen möglich,*) d.h.: der zu definierende Begriff kann meist auf verschiedenen "Niveaus" exaktifiziert" werden. Die Vor- und Nachteile eines solchen Vorgehens liegen auf der Hand: einerseits wird es möglich, "exkate" und in der beschriebenen Weise gesicherte (d.h. beweisbare) Resultate zu gewinnen, andererseits verliert der Begriff - wie bei jeder Definition (definire, lat.: begrenzen) manches von seinem ursprünglichen intuitiven Gehalt. Wir werden dies in einigen Beispielen genauer sehen. Paradebeispiel: definiert man den Begriff des Flächeninhaltes ebener Punktemengen $P, Q, \ldots$ als reellwertige Funktion m mit den bekannten, wohl "unverzichtbaren" Eigenschaften (1) $m(P) \geq 0$, $m(\emptyset) = 0$, (2) $m(P \cup Q) \leq m(P) + m(Q)$; $(P \cap Q = \emptyset) \Rightarrow m(P \cup Q) = m(P) + m(Q)$. (3) der Inhalt eines Quadrates mit der Seitenlänge 1 sei gleich 1, und (4) "kongruente Punktmengen sollen den gleichen Inhalt haben", gibt es nicht nur eine sondern <u>mehrere</u> derartige "Inhaltsfunktionen" m. Im drei- und höherdimensionalen Raum R^n $(n \geq 3)$ müssen wir bekanntlich - den üblichen Mengenbegriff vorausgesetzt - aber in Kauf nehmen, daß es sogenannte "nicht-meßbare" Menge gibt, also Punktmengen, welchen keine reelle Zahl als (Volums-) Inhalt zugeordnet werden kann. In jedem Fall liegt also durch die Exaktifizierung eine Einschränkung der intuitiven Vorstellung einer "Inhaltsfunktion" vor. Verlangt man außer (2) noch die sogenannte "σ-Additivität", d.h. $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$ für abzählbar viele Mengen $A_i, i = 1, 2, 3, \ldots$, wo die rechte Reihe konvergent ist (z.B. Quadrate A_i mit der Seitenlänge 2^{-i}), so gibt es in <u>keinem</u> R^n $(n \geq 1)$ eine derartige Maßfunktion m, die <u>allen</u> beschränkten Teilmengen des R^n einen "Inhalt" (="Maß") zuordnet. Man kann übrigens zeigen, daß diese Tatsache von der (ihrerseits axiomatischen) Definition des <u>Mengebegriffes</u> abhängt.

Die moderne Mathematik übernimmt also nicht - wie früher vielfach üblich - die unscharfen Begriffe der Intuition; man versucht, sie in gewisse Grundstrukturen einzuordnen (z.B. vom Mengenbegriff her aufzubauen). Es wäre aber ein großer Fehler, zu glauben, daß sich die sogenannte "neue" Mathematik in derartigen - oft sehr sterilen - "strukturmathematischen" Betrachtungen erschöpft. Immer noch ist es die spannende und allezeit herausfordernde Aufgabe der Mathematik, nicht-

---

*) Je zweckmäßiger und treffender die Begriffsbildung, desto chancenreicher die Anwendungen.

triviale Sätze zu beweisen, aus Problemen der Praxis Theorien zu bilden, und diese wieder anzuwenden, aber auch solche Theorien zu bearbeiten, die "rein geistigen Ursprunges" sind. (Die Frage der unmittelbaren "Anwendbarkeit" wird heute vielfach überbetont, vielfach aber auch völlig negiert.) Jedenfalls ist die Erschaffung der Begriffswelt, in der sich die mathematische Arbeit abspielt, bei manchen Gebieten der Mathematik eine sehr große Anfangshürde, die es zu überspringen gilt. Da dies insbesonders bei der Topologie der Fall ist, scheint hier eine längere Einleitung gerechtfertigt.

Es treten in der Mathematik - grob gesagt - zwei Arten von Begriffen auf; (1) solche, die quasi aus innermathematisch technischen Gründen neu geschaffen werden, wie z.B. Gruppen, Ringe, Körper, spezielle Arten von Differentialgleichungen usw.; und (2) solche, deren wesentlicher Inhalt rein subjektiv und sozusagen von Natur aus schon dazusein scheint. Diese bedürfen im Sinne der Mathematik einer Präzisierung, um die von der Mathematik geforderte Objektivität und Sicherheit zu erreichen. Z.B.: der Zahlbegriff, Flächeninhalt, Wahrscheinlichkeit und in gewissem Sinn auch Kurven, Stetigkeit, also Begriffe, die zur Topologie gehören. Die Methode der Präzisierung ist eine (schrittweise) Exaktifizierung auf verschiedenen Niveaus, in verschiedenen Rahmen sozusagen. - Die folgenden Abschnitte versuchen dies an Hand des Stetigkeitsbegriffes zu verdeutlichen.

Wir werden nämlich versuchen, die Frage "Was ist Topologie" an Hand verschiedener Exaktifizierungen des Stetigkeitsbegriffes zu behandeln.*) So gesehen, mag es als vorläufige "Definition" der Topologie gelten, zu sagen, Topologie - im weitesten Sinn - sei dasjenige Gebiet, welches sich mit Aussagen über stetige Veränderungen, Abbildungen, Funktionen beschäftigt und mit allen Begriffssystemen, die eine Exaktifizierung des Stetigkeitsbegriffes erlauben. Die beiden vielleicht wichtigsten darunter, metrische und topologische Räume, sollen in einigen Aspekten hier zur Sprache kommen. Diese Räume treten dann als Definitions- und Wertebereiche stetiger Funktionen auf. - Das ist aber keineswegs alles: interessanterweise eignen sich diese Strukturen ebenso auch für eine Exaktifizierung des Konvergenzbegriffes und anderer in der Analysis bedeutsamer Begriffe. In diesem Sinn sind z.B. alle Aussagen über konvergente Folgen und Reihen jedenfalls "topologische Sätze".

Grundlage der klassischen Analysis (Differential- und Integralrechnung) sind die Körper R der reellen und C der komplexen Zahlen, also - wie wir gleich sehen werden - zwei ganz spezielle metrische Räume. So betrachtet, kann man die Topologie als Verallgemeinerung der Theorie von R und C ansehen. Gleichzeitig sieht man, warum vorher von der Topologie als einer der Grundlagen der Analysis gesprochen wurde. Ferner bilden auch stetige Funktionen mehrerer reeller Variabler eine wichtige Rolle in der klassischen Analysis, also stetige Funktionen zwischen höherdimensionalen euklidischen Räumen $R^2, R^3, \ldots, R^n$. Eine "stetige Verbiegung" einer in den dreidimensionalen Raum R^3 eingebetteten Fläche (etwa einer Kugel zu einem Ellipsoid) kann dann als stetige Funktion zwischen Teilmengen des R^3 aufgefaßt werden. Aussagen z.B. über Eigenschaften einer Fläche, die bei "stetigen Veränderungen" invariant bleiben, gehören so gesehen auch in das Reich der Topologie, welches von dieser Warte dann als Teilgebiet der Geometrie erscheint. (Wir werden das im folgenden Abschnitt genauer ausführen.) Stellt man sich die erwähnte Fläche als Gummihaut vor, welche einer stetigen Verbiegung

*) Zum Begriff der Exaktifizierung und seinen didaktischen Aspekten, siehe Arbeiten von R. Fischer, z.B. "Die Rolle des Exaktifizierens im Analysisunterricht", ersch. in "Didaktik der Mathematik".

unterworfen ist, so wird vielleicht das alte Wort, Topologie sei "Geometrie auf der Gummihaut", etwas verständlicher.

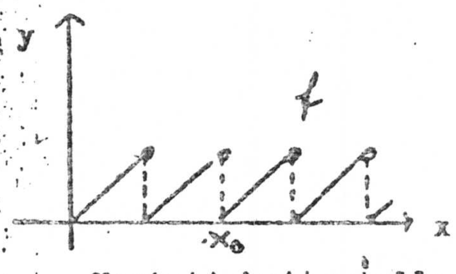
Wie bei anderen Gebieten auch sollte man jedenfalls Sätzen wie "Topologie ist ..." kritisch gegenüberstehen, da sie meist nur wenige Aspekte erfassen und außerdem den dauernden Erneuerungen und Standpunktsverlagerungen kaum Rechnung tragen. Eher sollte man an Hand von Beispielen (siehe etwa § 2) ein Gefühl dafür entwickeln, welche Sätze, Begriffe und Methoden als "topologisch" gelten können. Topologie ist dann ganz allgemein die Zusammenfassung aller dieser Sätze.

§ 2. STETIGKEIT

In der "Praxis" treten viele Phänomene auf (z.B. Veränderungen, Vorgänge Funktionen, etc.), die wir ohne weiteres als stetig bzw. unstetig bezeichnen. Etwa das Wachstum von Lebewesen, Druck- und Temperaturveränderungen oder - andererseits - den Bruch eines unter Dehnungskräften stehenden Eisenstückes, die durch stufenweise Progression entstehenden Sprungstellen der Steuerkurven u.a.m. An der Spitze der historischen Entwicklung der Differentialrechnung steht der Satz "natura non facit saltus", die angenommene Beschreibbarkeit der Naturvorgänge durch stetige, ja sogar differenzierbare Funktionen. Und obwohl wir heute - z.B. aus der Quantenphysik - wissen, daß dieser Satz eher nicht zutrifft, bleibt die Beschreibung von Naturvorgängen durch (stückweise) stetige und meist sogar als differenzierbar angenommene Funktionen eine der grundlegenden Ausgangspunkte der mathematischen Physik.

Eine reelle Funktion f wird bekanntlich als stetig bei x_o bezeichnet, wenn ihr Graph in einer Umgebung von x_o "fadenförmig" verläuft. Hingegen sind Sprungstellen typische Beispiele für sogenannte Unstetigkeitsstellen:

f ist stetig bei x_o



Unstetigkeitsstellen
(Sprungstellen)

Roher Vorstellungsinhalt: Kleine Veränderungen von x haben "kleine" (andernfalls möglicherweise "große") Veränderungen von y zur Folge; (kleine Ursachen, kleine bzw. große Wirkungen).
Eine Exaktifizierung dieses Vorstellungsinhaltes im Rahmen der reellen Zahlen lautet bekanntlich wie folgt:

<u>Definition 1:</u> f ist stetig bei x_o, wenn <u>für</u> <u>jede</u> Folge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_o$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_o)$ (Fig. A).-Die Negation: f ist unstetig bei x_o, wenn es eine Folge (x_n) gibt, welche gegen x_o strebt, für die aber $\lim f(x_n)$ entweder nicht existiert oder ungleich $f(x_o)$ ist. (Letzteres firmiert unter dem Namen Sprungstelle, für ersteres ist ($f(x) = \sin \frac{1}{x}$, wenn $x \neq 0$, und $f(0) = 0$) ein typisches Beispiel. Skizze für $x_o = 0$!)

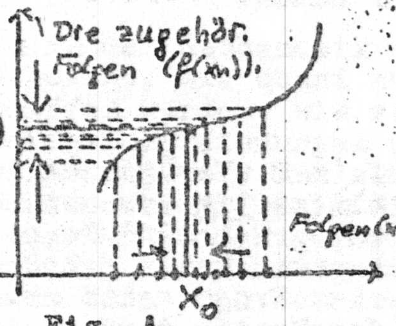


Fig. A

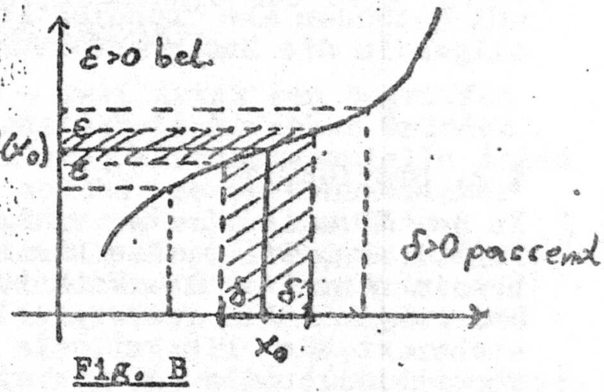


Fig. B

Diese Definition trifft zwar das, was wir ausdrücken wollten, sie hat aber den Nachteil, daß man im konkreten Fall die Stetigkeit nur schwer nachweisen kann, da ja alle Folgen $(x_n) \to x_o$ untersucht werden müssen. Auch eignet sie sich - wie wir noch andeuten werden - nur sehr schwer zur Verallgemeinerung des Stetigkeitsphänomens auf allgemeinere als reelle Funktionen. Ein wesentlicher Nachteil liegt darin, daß man hier den Grenzwertbegriff bereits kennen muß. Eine Definition der Stetigkeit ist aber <u>ohne</u> diesen relativ komplizierten Begriff möglich und wünschenswert. - Wie oft in der Mathematik geht man nun wie folgt vor: man nimmt einen Satz, der die Stetigkeit von f bei x_o charakterisiert und verwendet diesen als neue Definition. Die alte Definition gewinnt dann automatisch den Charakter eines Satzes bzw. einer äquivalenten Definition. (Die neue Definition läßt sich dann oft besser verallgemeinern. Dies ist das Grundmuster für Verallgemeinerungen eines Begriffes, hier äußert sich u.a. die Geschicklichkeit des Forschers.)

<u>Satz 1:</u> $f: R \to R$ ist stetig bei x_o genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle x mit $|x - x_o| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(x_o)| < \varepsilon$ (Fig. B). (Man überprüfe die Negation dessen an Hand einer Sprungstelle! Skizze!).

Aus den erwähnten Zweckmäßigkeitsgründen verwenden wir ab nun diesen - wenn auch vielleicht weniger anschaulichen - Satz als <u>Definition der Stetigkeit</u>. Ist eine Funktion f bei allen Punkten x_o ihres Definitionsbereiches stetig, so spricht man schlechthin von einer <u>stetigen</u> <u>Funktion</u>.

Die folgende Beobachtung wird uns einen großen Schritt weiter führen: $|x - x_o| < \delta$ bedeutet doch wohl, daß die Distanz zwischen x_o und x kleiner als δ ist. Obige Bedingung läßt sich also <u>auch so formulieren:</u> für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, so daß $f(x)$ von $f(x_o)$ weniger als ε entfernt ist, wenn nur x von x_o weniger als δ entfernt ist. <u>Oder so:</u>

$f(x)$ kommt $f(x_0)$ beliebig nahe, wenn nur x hinreichend nahe bei x_0 ist. (Man zeige, daß z.B. bei einer Sprungstelle genau die Negation dessen gilt!)

Die Stetigkeitsdefinition fußt also auf dem Entfernungs-, dem Distanzbegriff auf der Zahlengeraden (bzw. der Zeitlinie etc.). Oben sprachen wir ja auch rein intuitiv schon von "kleinen" Veränderungen der Variablen x bzw. $y = f(x)$. Wenn man also weiß, wann zwei Punkte mehr oder weniger nahe voneinander sind, wenn man also einen Distanzbegriff für je zwei Punkte zur Verfügung hat, kann man offenbar auch definieren, was man unter stetigen Funktionen versteht. Die bereits angedeutete - und überaus wichtige - Verallgemeinerung des Stetigkeitsbegriffes kommt nun daher, daß man für gewisse Mengen definitorisch festlegt, was man unter einer <u>Distanz</u> zwischen Elementen dieser Menge zu verstehen hat und dann <u>Funktionen</u> auf solchen Mengen studiert. (Das ermöglicht dann eine Exaktifizierung des Stetigkeitsbegriffes auf einer "höheren", sprich: allgemeineren, Stufe.) Es zeigt sich, daß ein solches Vorgehen viele und bedeutsame Anwendungen gestattet. Die folgende Definition stützt sich auf 3 mehr oder minder unverzichtbare Eigenschaften des anschaulichen Distanzbegriffes für Punkte im physikalischen Raum:

<u>Definition 2:</u> Gegeben sei eine Menge X, ferner sei zu je 2 Punkten $x,y \in X$ eine reelle Zahl $d(x,y)$ festgelegt, so daß (1) $d(x,y) \geq 0$ für alle $x,y \in X$, und $d(x,y) = 0$ genau dann, wenn $x = y$; ferner: (2) $d(x,y) = d(y,x)$ für alle $x,y \in X$; und schließlich die sogenannte "Dreiecksungleichung" (3) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ für alle $x,y,z \in X$. Dann sprechen wir von einem <u>metrischen Raum</u>.

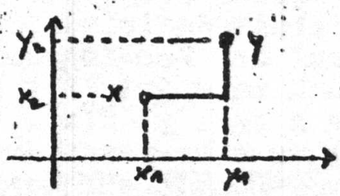
<u>Beispiel A:</u> $X = R$, $d(x,y) = |x - y|$. (Man verifiziere die Axiome (1) - (3)!). Der Absolutbetrag "induziert" somit eine Metrik (= Distanzfunktion) auf der Menge der reellen Zahlen. Wir sprechen in diesem Zusammenhang vom metrischen Raum der reellen Zahlen.

<u>Beispiel B:</u> $X = C$, $d(z_1,z_2) = |z_1 - x_2|$. Analog zu Beispiel A sprechen wir vom metrischen Raum der komplexen Zahlen.

<u>Beispiel C:</u> $X = R^2 = \{(x_1,x_2)/x_i \in R\}$, also die - mit einem Koordinatensystem versehene Ebene; $d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, der aus der analytischen Geometrie hinlänglich bekannte Distanzbegriff; man verdeutliche sich die Axiome (1) - (3) (eigentlich müßte man beweisen, daß sie hier erfüllt sind!). - Wir sehen hier übrigens deutlich, daß Definition 2 eine recht anschauliche Exaktifizierung unseres intuitiven Distanzbegriffes ist; freilich dürfen wir dennoch bei Beweisführungen auf <u>nichts anderem</u> als auf den Axiomen (1) - (3) aufbauen. Diese bzw. die daraus abgeleiteten Eigenschaften und nur diese sind konstitutiv für den Distanzbegriff der Topologie, keine weiteren Eigenschaften, mögen sie auch noch so "anschaulich klar" sein. (Das ist sozusagen der Preis für die Exaktifizierung und gleichzeitig ein Gewinn.) Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir eine weitere unter vielen anderen Möglichkeiten, im R^2 einen Distanzbegriff festzulegen. (I.a. wählt man eine für die jeweilige Problemstellung brauchbare Metrik; vgl. die folgenden Beispiele.)

Beispiel D: $X = R^2$, $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. – Diese Metrik heißt oft auch Taximetrik (warum wohl?). Man skizziere den "Kreis" mit Mittelpunkt (0,0) und Radius 1!

"Taximetrik":



Ganz allgemein bezeichnet man in jedem metrischen Raum die "Kugeln" $\{y/d(x,y) < \varepsilon\}$ mit "Mittelpunkt" x und "Radius" ε, $\varepsilon > 0$, als (offene) ε-Umgebungen des Punktes x. – Man skizziere in den obigen Beispielen einige ε-Umgebungen einiger Punkte.

Beispiel C zeigt die meist verwendete, die sogenannte "euklidische" Distanz. Sie "paßt" für die meisten Probleme – z.B. der Geometrie – und läßt sich auf beliebig hochdimensionale Räume $R^n = \{(x_1 \ldots x_n)/x_i \in R\}$ verallgemeinern:

Beispiel E: $X = R^n$, $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$. Für $n = 3$ ergibt dies ein "topologisches Modell" des "physikalischen" Raumes; von daher leitet sich auch die Bezeichnung "ε-Kugel um den Punkt x" für die Mengen $\{y/d(x,y) < \varepsilon\}$ ab, handelt es sich doch für $n = 3$ einfach um die üblichen Kugeln mit Mittelpunkt x und Radius ε, allerdings ohne den "Rand" $\{y/d(x,y) = \varepsilon\}$. Diesen Rand – sozusagen die Kugeloberfläche – wollen wir als 2-dimensionale Sphäre bezeichnen, und für die spezielle Sphäre $\{x/x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ das Symbol S^2 vorsehen (was müßte dann S^1 bedeuten?). Analog spricht man von der in den R^4 eingebetteten und kaum anschaulich vorstellbaren 3-dimensionalen Sphäre $S^2 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4)/\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} = d(x,0) = 1\}$, und entsprechend von beliebig hochdimensionalen Sphären S^n. – In der modernen Physik spielen derartige hochdimensionale geometrische Gebilde eine wichtige Rolle.

Die Sphären sind Protobeispiele für besonders wichtige metrische Räume, die sogenannten Mannigfaltigkeiten. 1-dimensionale Mannigfaltigkeiten, z.B. im R^3 kann man sich – grob gesprochen – als "verbogene Gerade", als Kurven (ohne Überschneidungspunkte) vorstellen; 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten im R^3 darf man sich – wieder grob gesprochen – als Flächen vorstellen, z.B. die S^2. Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension entstehen z.B. als Lösungsmengen gewisser Gleichungen bzw. Gleichungssysteme. (Daraus erhellt auch ihre Bedeutung für die Physik!). Beispiele: I) Die S^2 besteht – als Teilmenge des R^3 – aus den Lösungen der Gleichung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$; analog die S^1, also der Einheitskreis im R^2!
II) Die Lösungen des Gleichungssystems $x_1^2 + x_2^2 - x_3 = 0$ und $x_2 - 2 = 0$ bilden eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im R^3 (Parabel als Schnitt zwischen dem Drehparaboloid und der Ebene $x_2 = 2$). – Offenbar beschreiben etwa k Gleichungen mit n Unbekannten eine (n-k)-dimensionale Mannigfaltigkeit im Raum R^n.

Diese Beschreibung hat den Nachteil, daß sie außer der "Mannigfaltigkeit" selbst auch den umgebenden Raum enthält. Die Eigenschaften z.B. einer ebenen Parabel sind aber unabhängig davon, ob sie in die Ebene R^2 oder in den R^3 eingebettet ist. Auch lassen sich gewisse Mannigfaltigkeiten nur schwer in einem "umgebenden Raum" vorstellen (z.B. Riemannsche Flächen). Eine gute Definition des Begriffes "Mannigfaltigkeit" sollte daher - wie auch aus anderen Gründen - keinen "umgebenden Raum" enthalten, und die Mannigfaltigkeit mit Hilfe innerer lokaler Eigenschaften beschreiben. Siehe Definition 5.

Als Teilmengen eines metrischen Raumes R^n sind die Mannigfaltigkeiten selbst metrische Räume. Je 2 Punkte x,y (z.B. der Sphäre S^2 "erben" ja eine Distanz $d(x,y)$ vom R^3, da sie ja als Punkte des R^3 eine derartige Distanz besitzen. (Modern ausgedrückt ist die Metrik auf einer Mannigfaltigkeit $M \subset R^n$ einfach die Einschränkung der Distanzfunktion $d: R^n \times R^n \to R$ auf $M \times M$). Es sind allerdings auf Mannigfaltigkeiten auch andere Distanzfunktionen denkbar. Messung etwa längs Großkreisen auf der S^2. Gerade in der modernen Physik spielen Mannigfaltigkeiten mit solchen speziellen Distanzfunktionen eine wichtige Rolle. Auch die sogenannte <u>Katastrophentheorie</u>, ein ganz neuer Zweig der Topologie, beschäftigt sich letzten Endes im wesentlichen mit der Beschreibung gewisser Unstetigkeitsphänomenen auf Mannigfaltigkeiten (siehe [7]).

Diese Bemerkung bringt uns zurück zum Thema <u>Stetigkeit</u>. Sehen wir uns nochmals die Definition der Stetigkeit (Satz 1) und die nach folgenden Bemerkungen an, so sehen wir, daß metrische Räume offenbar einen geeigneten Rahmen für eine <u>allgemeinere Stetigkeitsdefinition</u> abgeben können.

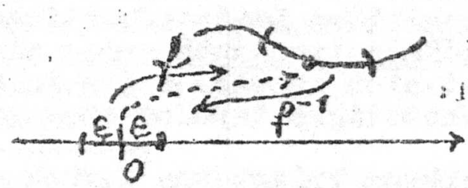
<u>Definition 3:</u> Eine Abbildung (Funktion) f von einem metrischen Raum (X,d_X) in einen metrischen Raum (Y,d_Y) heißt <u>stetig bei $x_0 \in X$</u>, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß für alle Punkte $x \in X$ mit $d_X(x,x_0) < \delta$ gilt: $d_Y(f(x),f(x_0)) < \varepsilon$. Eine bei allen Punkten x_0 des Definitionsbereiches stetige Funktion heißt schlechthin <u>"stetig"</u>. (Man verdeutliche sich dies wieder ohne ε und δ, wie wir es nach Satz 1 getan haben und zeige, daß jede stetige reellwertige Funktion auch in diesem allgemeineren Sinn stetig ist.)

<u>Beispiel:</u> Sei $0 \leq t \leq 1$, dann wird durch die Funktionsgleichungen $x_1 = t$ und $x_2 = 2t^2$ ein Parabelbogen in der Ebene beschrieben, anders ausgedrückt, die Abbildung $f: t \to (t, 2t^2)$ beschreibt eine (wie man als Übungsaufgabe nachweisen sollte) stetige Funktion von $[0,1] \subset R$ in die Ebene R^2, deren Bildbereich genau aus einem Parabelbogen besteht. Es handelt sich also um eine "stetige Verbiegung" des Einheitsintervalles. Analog beschreibt die Abbildung $f: [0,1] \to R^3$ gegeben durch $t \to (\cos t, \sin t, t)$ eine (spiralförmige) Kurve im R^3. - Diese Überlegungen legen eine <u>Exaktifizierung des Kurvenbegriffes</u> (im "Reich" der Topologie) wie folgt nahe:

<u>Definition 4:</u> Unter einer Kurve in einem metrischen Raum (X,d) versteht man eine stetige Abbildung f von $[0,1] \subset R$ in X.

Damit ist im Sinn der Einleitung der Begriff <u>"Kurve"</u> ein "topologischer Aussagen über Kurven fallen daher - grob gesagt - unter die Chiffre "topologische Aussagen". (Siehe z.B. den Jordanschen Kurvensatz weiter unten). - Leider zeigt diese Definition ein in der Mathematik öfter auftretendes Phänomen: so elegant, anschaulich und technisch brauchbar sie ist, trifft sie dennoch unseren Vorstellungsinhalt von einer "Kurve" nicht ganz: G. Peano konnte 1890 zeigen, daß es eine stetige Abbildung von $[0,1]$ auf das Einheitsquadrat gibt; d.h. eine Kurve, die das ganze Einheitsquadrat ausfüllt. (Man spricht von "Peano-Kurven", vgl. [1], [6]). Um wirklich 1-dimensionale Gebilde (Mannigfaltigkeiten) zu erhalten, müssen wir also den Kurvenbegriff noch weiter einschränken. Wir gehen dabei von Kurven aus, die um jeden Punkt wirklich wie ein verbogenes Geradenstück aussehen. Wenn also jeder Punkt P eine Umgebung besitzt, welche als umkehrbar eindeutiges stetiges Bild einer ε-Umgebung des Punkte $0 \in R$ so dargestellt werden kann, daß auch die Umkehrabbildung f^{-1} stetig ist. Dadurch schließen wir z.B. Doppelpunkte aus und haben auch die Eindimensionalität gut "eingefangen"!

Fig. zu obiger Bemerkung:
(dabei ist f bijektiv und stetig, ebenso die Umkehrabbildung f^{-1}).



Analog sollte wohl jeder Punkt einer 2-dimensionalen Fläche rein anschaulich eine Umgebung besitzen, die wie eine kleine verbogene Kreisscheibe aussieht. Man verdeutliche sich, daß die folgende Definition unseren anschaulichen Flächenbegriff für $n=2$ enthält.

Definition 5: Ein metrischer Raum X heißt n-dimensionale Mannigfaltigkeit, wenn jeder Punkt $p \in X$ eine Umgebung $U(p)$ besitzt, welche sich umkehrbar eindeutig und in beiden Richtungen stetig auf eine ε-Umgebung $U_\varepsilon(0)$ des Nullpunktes im euklidischen Raum R^n abbilden läßt. (Unter "Umgebungen" $U(p)$ eines Punktes p verstehen wir dabei Mengen, welche außer p noch eine ganze ε-Umgebung von p enthalten. Siehe § 3).

Soweit also "die" Definition des bereits vorher als wichtig erkannten Begriffes, ein weiteres Beispiel einer Exaktifizierung und Verallgemeinerung so intuitiver Begriffe wie Kurve und Fläche. Gleichzeitig bringt uns aber diese Definition zu einem so zentralen Begriff der Topologie, daß er geradezu für eine "Defintion" der Topologie herangezogen werden kann und damit zu einer Beantwortung unserer Themenfrage.

Definition 6: Zwei metrische Räume X und Y heißen homöomorph (gr. = gleich gestaltig), wenn es eine stetige, umkehrbar eindeutige Abbildung f von X auf Y gibt, so daß auch die Umkehrabbildung f^{-1} stetig ist. Die Abbildung f heißt dann ein Homöomorphismus. (Vergleiche den Isomorphiebegriff bei Gruppen oder etwa den Begriff der Gleichmächtigkeit von Mengen, u.a.m.)

In Definition 5 sind also $U(p)$ und $U_\varepsilon(0)$ homöomorph, dafür sagt man auch: sie seien vom topologischen Standpunkt aus gleich. Unterscheidungen beider sind nur von anderen Standpunkten aus möglich, z.B. vom Standpunkt der Differentialgeometrie, die z.B. "Krümmungen" kennt und untersucht. "Krümmung" läßt sich aus rein topologischer Sichtweise nicht erfassen, Aussagen über Krümmungen etwa gehören nicht zur Topologie.

Ein Kreis und ein Quadrat oder eine Ellipse sind topologisch äquivalent, sprich: homöomorph. Ein Kreis und ein "Achter" z.B. nicht; wegen des Doppelpunktes kann der Achter nicht als homöomorphes Bild des Kreises beschrieben werden. (Man verdeutliche sich dies durch eine Skizze und finde analoge Beispiele.) - So gesehen wird vielleicht auch klar, was mit der Formel "Topologie = Geometrie auf der Gummihaut" gemeint war: Gegenstand der Topologie sind sozusagen alle Begriffsbildungen und Eigenschaften (z.B. in metrischen Räumen), welche <u>invariant gegenüber Homöomorphismen</u> sind; etwa die Aussagen, daß ein "Achter" genau einen Doppelpunkt besitzt.

Wir verdeutlichen dies an einem berühmten <u>Beispiel</u> der <u>Eulerschen Polyederformel</u>: <u>Eckenanzahl</u> plus <u>Flächenanzahl</u> eines konvexen Polyeders übertrifft die <u>Kantenanzahl</u> stets um 2.

Projizieren wir ein solches Polyeder von innen auf eine umbeschriebene Kugel, so erhalten wir ein System von "Ecken", "Kanten" und "Flächen" auf der Kugel, das wir ebenfalls als Polyeder bezeichnen. Die Eulersche Polyederformel ist nun deswegen eigentlich ein <u>topologischer Satz</u>, weil sie unabhängig von homöomorphen Verbiegungen dieser Kugel für das auf der Kugel als aufgemalt gedachte Polyeder gilt. D.h. die Eulersche Polyederformel drückt eine <u>topologische Eigenschaft von Polyedern aus</u>, die also unabhängig ist von der "elementar-geometrischen Gestalt".
H. Poincaré hat diesen Polyedersatz verallgemeinert und zu einem besonders wichtigen Satz der algebraischen Topologie gemacht.

Abschließend wollen wir ein weiteres Beispiel metrischer Räume vorführen welches zeigen soll, daß sich die Topologie keinesfalls in geometrischen Fragestellungen erschöpft. Untersuchungen der folgenden Art stehen am Anfang eines ebenfalls äußerst bedeutsamen, modernen Gebietes der Mathematik: der sogenannten Funktionalanalysis.

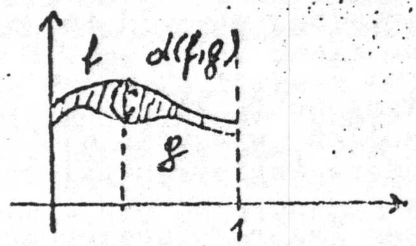


Fig. zum nachfolgenden Beispiel F.

<u>Beispiel F:</u> Betrachten wir die Menge $C([0,1])$ aller stetigen reellen Funktionen auf $[0,1]$ und setzen wir $\max\{|f(x)-g(x)| / 0 \le x \le 1\} = d(f,g)$, so läßt sich leicht zeigen, daß die Forderungen (1) - (3) aus Definition 2 erfüllt sind. Wir haben also auf der Menge $C([0,1])$ eine Distanzfunktion festgelegt und so die Menge <u>$C([0,1])$</u> zu einem <u>metrischen Raum</u> gemacht. (C steht für "continuous" = stetig).

Mit geometrischen Vorstellungen ist dieser Raum kaum mehr faßbar, doch die Nützlichkeit dieses Beispiels mag schon aus folgendem hervorgehen:
<u>Beispiel G:</u> Ordnen wir jeder Funktion $f \in C([0,1])$ ihr Integral $\int_0^1 f(x)dx$ also eine ganz bestimmte reelle Zahl zu, so erhalten wir eine Funktion F von $C([0,1])$ in R, welche - als Abbildung zwischen metrischen Räumen - <u>stetig</u> ist. - So gesehen zählt auch die Integrationstheorie im weitesten Sinn zur Topologie. Noch dazu ist es dieser Aspekt des Integrales, welcher es gestattet, die Integrationstheorie weit über ihren klassischen Inhalt zu einem für viele Probleme der Mathematik und Physik nützlichen Gebiet auszubauen. (Vgl. die Stichworte "Funktionalanalysis" und "Integration auf topologischen Gruppen" in den diversen Lexika.)
Wie sehr <u>Stetigkeit</u> und <u>Integral</u> verwandt sind, soll ein einziger Satz

exemplarisch zeigen, eine Art Umkehrung der obigen Feststellung sozusagen. (Vorher soll noch daran erinnert werden, daß die Abbildung $F: C([0,1])\to R$, gegeben durch $F(f) = \int_0^1 f(x)dx$ linear ist, d.h. $F(f+g) = F(f) + F(g)$ und $F(a.f) = aF(f)$ für $a \in R$).

Satz: Jede lineare und stetige Abbildung $F: C([0,1])\to R$ läßt sich als (Stieltjes)-Integral $\int_0^1 f(x)dg$ schreiben, wobei g eine passende, nur von F abhängige reelle Funktion ist.

Nun wollen wir - wieder an einem Beispiel - ein anderes bedeutsames Anwendungsgebiet der Topologie anreißen, ich meine das Gebiet der Approximationstheorie. K. Weierstraß hat folgenden Satz bewiesen, der bis heute vielfach verallgemeinert wurde:

Satz: Gegeben sei eine beliebige stetige Funktion f auf $[0,1]$ und ein $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein Polynom p auf $[0,1]$, so daß für alle $x \in [0,1]$ gilt: $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$. Nach Beispiel F bedeutet das: $d(f,p) < \varepsilon$.

Jede, wenn auch noch so komplizierte, stetige Funktion kann also mit beliebig vorgegebener Genauigkeit ε durch Polynome, also wesentlich einfachere Funktionen, approximiert werden. Anders ausgedrückt: in jeder ε-Umgebung der Funktion $f \in C([0,1])$ liegt mindestens ein Polynom p. Dafür sagt man: die Menge aller Polynome auf $[0,1]$, d.i. selbstverständlich eine Teilmenge von $C([0,1])$, liegt im metrischen Raum $C([0,1])$ dicht. - Eine ganz analoge topologische Aussage kennen wir bei den reellen Zahlen: die Menge Q der rationalen Zahlen liegt dicht im metrischen Raum R der reellen Zahlen. D.h.: jede reelle Zahl r kann mit beliebig vorgegebener Genauigkeit $\varepsilon > 0$ durch rationale Zahlen q approximiert werden, d.h. $d(r,q) = |r-q| < \varepsilon$. (Topologische Aussagen traten also schon jeher auch in der Schule auf).

Das allgemeine Ziel, komplizierte Objekte durch einfachere zu approximieren und die jeweils zugehörige Theorie setzt also - grob gesprochen - stets eine Art Distanzbegriff voraus und führt so praktisch immer auf topologische Fragen im weitesten Sinn. -

Abschließend möchte ich einige Beispiele fast schon klassisch zu nennender Sätze anführen, die nur ein wenig zeigen sollen, wie weit die Theorie der Stetigkeit (und damit die Topologie) in andere Gebiete hineinreicht.

(I) Eine moderne Methode, den oben erwähnten Euler-Poincaréschen Polyedersatz in voller Allgemeinheit zu beweisen, ist die Benützung des berühmten Poincaré-Hopfschen Indexsatzes über die Nullstellen stetig differenzierbarer Vektorfelder auf Mannigfaltigkeiten. Es handelt sich dabei um einen äußerst tiefliegenden und anwendungsreichen Satz der algebraischen Topologie, der aber u.a. einen schon Newton bekannten interessanten Spezialfall besitzt, der sich anschaulich formulieren läßt:

Verformt man die Sphäre S^2, also die Kugeloberfläche zu einer beliebigen Landschaft (etwa die Erdoberfläche), so gilt:

(Anzahl der Talmulden) + (Anzahl der Gipfel) - (Anzahl der Pässe) = 2.

Das gilt - wie gesagt - für jede stetige Verformung der Kugeloberfläche, d.h. für jede, wie immer geartete Landschaft. In diesem Sinn handelt es sich bei der Gleichung um einen "topologischen" Satz. Wir werden später noch genauer sagen, was man unter "topologischen" Sätzen und Problemen zu verstehen hat. - Der Satz läßt sich übrigens auch für wesentlich kompliziertere "Ausgangsflächen" an Stelle der Sphäre S^2 beweisen und ist im wesentlichen eine Aussage über das "Geschlecht" der (Ausgangs-)Fläche und über die Nullstellen des Gradientenfeldes der "Geländehöhe".

Eines der ältesten Beispiele "topologischer" Sätze ist der Jordansche Kurvensatz. Er ist das Protobeispiel eines Satzes, der sich ganz einfach formulieren läßt. Der Laie würde sogar meinen, daß dieser Satz so anschaulich ist, daß er gar keines Beweises bedürfe.

(II) Die Kreislinie S teilt die Ebene R^2 in 2 Gebiete, ein "Innengebiet" G_1 und ein "Außengebiet" G_2. Das Innengebiet G_1 ist dabei "einfach zusammenhängend", d.h.: jede Kreislinie K läßt sich innerhalb des Gebietes G_1 stetig auf einen Punkt zusammenziehen. Man sagt dafür auch: K sei "nullhomotop". Das "Außengebiet" G_2, oder z.B. ein Kreisringgebiet G ist nicht einfach zusammenhängend, da man etwa den "Mittelkreis" zwischen den Kreisringrändern nicht in G stetig auf den Mittelpunkt zusammenziehen kann.

Der Jordansche Kurvensatz ist nun eine Aussage über ebene Kurven C, welche mit einer Kreislinie (d.h. mit S^1) homöomorph sind. (Grob gesagt: C ist eine geschlossene Kurve ohne Doppelpunkte) Genau wie S^1 teilt nun auch C die Ebene in genau 2 Gebiete H_1 und H_2, wie kompliziert C auch verlaufen mag

Schon um die Jahrhundertwende hat Schönfließ ferner gezeigt, daß dann genau eines der beiden Gebiete einfach zusammenhängend ist. Man kann dieses daher wieder als "Innengebiet" der Kurve C bezeichnen. Weiters folgt, daß dieses Gebiet mit dem Innengebiet G_1 der Kreislinie S^1 homöomorph ist; und ebenso sind die beiden Außengebiete homöomorph.

Der einfachste Beweis dieser Tatsache führt übrigens über den Riemannschen Abbildungssatz, einen tiefliegenden und sehr wichtigen Satz der komplexen Funktionentheorie. Schon daraus mag man ersehen, daß anschaulich scheinbar klare Sätze - wie eben der Jordansche Kurvensatz - oft nur äußerst schwer zu beweisen sind. Wie kompliziert die Dinge beim Jordanschen Kurvensatz tatsächlich sind, erkennt man außerdem, wenn man versucht, einen zum Jordanschen Kurvensatz analog formulierten Satz im R^3 zu formulieren. Man wird dort statt S^1 die Sphäre S^2, also die Kugeloberfläche, verwenden: es teilt nun analog die 2-dimensionale Sphäre S^2 den Raum R^3 in ein Innengebiet G_1 und ein Außengebiet G_2, die aber nun - wie man sich vielleicht selbst veranschaulichen kann - beide einfach zusammenhängend sind. (Übrigens ein tiefliegender "topologischer Unterschied" zwischen dem 2- und 3-dimensionalen Raum R^2 und R^3!). Denkt man sich nun wieder eine mit der Sphäre S^2 homöomorphe Mannigfaltigkeit (Fläche) C im Raum R^3, so teilt nun zwar diese "topologisch verformte Sphäre" C den Raum R^3 wieder in zwei Gebiete H_1 und H_2 und wir können wieder vom Innen- und Außengebiet der Mannigfaltigkeit C sprechen. Entscheidend ist aber, daß nun - Hohn der Anschauung - trotz der Homöomorphie des gemeinsamen Randes C die beiden Innen- bzw. Außengebiete nicht mehr homöomorph sein müssen. Eine berühmte Fläche dieser Art - man spricht von "wild" eingebetteten Flächen - ist Alexanders "gehörnte Sphäre" die zu beschreiben den vorliegenden Rahmen sprengte. Betrachtet man das Bild auf Seite 18, so erkennt man vielleicht auch ohne strengen Beweis, daß das "Außengebiet" dieser Fläche C nicht einfach zusammenhängend ist. Andererseits ist aber das Außengebiet G_2 der Sphäre S^2 im R^3 offensichtlich einfach zusammenhängend, und es können daher die beiden Außengebiete nicht homöomorph sein. Um dies zu erkennen, muß man nur den relativ leicht zu beweisenden Satz kennen, dem zufolge die Eigenschaft "einfach zusammenhängend" eine "topologische Eigenschaft" ist, d.h. sie ist invariant gegenüber Homöomorphismen: jedes mit einem einfach zusammenhängenden Gebiet G homöomorphe Gebiet H ist ebenfalls einfach zusammenhängend.

Der erstmals von Alexander geführte Beweis dafür, daß die auf Seite 16 angedeutete Fläche, also die gehörnte Sphäre C tatsächlich mit der 2-dimensionalen Sphäre S^2 homöomorph ist, ist ziemlich kompliziert. Jedenfalls zeigt aber das Gesagte vielleicht exemplarisch, welche Problemstellungen und Methoden in das Gebiet der sogenannten "geometrischen Topologie" fallen. Insbesondere werden in diesem Gebiet auch andere "geometrische" Eigenschaften beliebig hochdimensionaler Mannigfaltigkeiten untersucht.

III) Ein - wie der Jordansche Kurvensatz - scheinbar selbstverständlicher, aber schwierig zu beweisender Satz ist auch der folgende:

<u>Satz</u>: Eine ebene Kreisscheibe mit Rand K läßt sich nicht stetig auf ihren Rand K abbilden, wenn man voraussetzt, daß alle Punkte des Randes K dabei fest bleiben sollen. - Bei jedem derartigen Versuch muß die Scheibe irgendwo "aufreißen", es entstehen also Unstetigkeitsstellen. (Skizze!).

Dieser Satz kann (eigenartigerweise) als Grundlage für viele bedeutende Sätze der sogenannten geometrischen Topologie dienen, z.B. für den Antipodensatz von Borsuk und Ulam. Er lautet (nicht in seiner allgemeinsten Form): Jede stetige Abbildung der Sphäre S^n in den R^n bildet mindestens ein antipodales Punktepaar auf ein und denselben Punkt ab. - Wenn beispielsweise (für $n=2$) das Gas aus einem Ballon abgelassen wird, so kommt demnach mindestens ein antipodales Punktepaar (bei der auf der Erde liegenden Ballonhaut) aufeinander zu liegen. Eine andere Deutung: Ordnet man jedem Punkt p der Erdoberfläche den Luftdruck $x_1(p)$ und die Temperatur $x_2(p)$ zu, so erhält man eine - offenbar stetige - Abbildung der S^2 in die (x_1-x_2)-Ebene R^2. Natürlich: jedem Punkt $p \in S^2$ wird ein Zahlenpaar $(x_1(p), x_2(p))$ zugeordnet, wobei die "Koeffizientenfunktionen offenbar stetig sind.

Es gibt daher stets ein antipodales Punktepaar mit gleichem Druck und gleicher Temperatur, gleichem Wetter sozusagen.-Eine andere wichtige Folgerung ist die Tatsache, daß R^n und R^m nur dann homöomorph sind, wenn $n=m$ gilt.

Auch diese Tatsache scheint selbstverständlich zu sein. Denken wir aber z.B. daran, daß die Menge aller Punkte einer Geraden und die Menge aller Punkte der Ebene gleichmächtig sind, so muß es also eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Gerade auf die Ebene geben. Allerdings sind diese Abbildungen nicht stetig. Es gibt aber auch stetige, surjektive Abbildungen von ein- auf zweidimensionale Gebilde, wie z.B. die bekannten "Peano-Kurven Das sind ebene Kurven, also stetige Abbildungen (= Verformungen) des Einheitsintervalles $\{x \in R / 0 \leq x \leq 1\}$, welche ein ganzes Quadrat lückenlos ausfüllen. Freilich sind diese Abbildungen wieder nicht injektiv, also nicht umkehrbar. Unser oben genannter Satz besagt also, daß verschieden-dimensionale Räume R^n und R^m jedenfalls nicht <u>so</u> bijektiv aufeinander abgebildet werden können, daß beide Richtungen <u>stetige</u> Abbildungen liefern.

IV) Eine weitere Folgerung aus Satz III ist der berühmte und wegen zahlreicher Anwendungen nützliche <u>Brouwersche Fixpunktsatz</u>, einer der - historisch gesehen - ersten tiefliegenden Sätze der ab ca. 1915 eigenständigen Disziplin "Topologie". Er besitzt viele Verallgemeinerungen und Anwendungen; eine grundlegende Formulierung lautet:

<u>Satz</u>: Jede stetige Abbildung f einer ihren Rand S^1 enthaltenden ebenen Kreisscheibe K in sich besitzt mindestens einen Fixpunkt x, d.h. $f(x) = x$.

<u>Anwendungsbeispiele</u>: Jede Lösung des Gleichungssystems

(1) $g_1(x,y) = \frac{1}{4}(x^2-y^4) + \frac{1}{3} = x$;

(2) $g_2(x,y) = \frac{1}{2} x^3 x^5 - \frac{1}{2} = y$ ist offensichtlich ein Fixpunkt der Abbildung $f: (x,y) \mapsto (g_1(x,y), g_2(x,y))$. Da man leicht zeigen kann, daß für alle (x,y) mit $x^2+y^2 \leq 1$ auch $g_1^2+g_2^2 \leq 1$ ist, handelt es sich bei f um eine Abbildung wie sie im obigen Satz beschrieben ist. f muß also mindestens einen Fixpunkt besitzen, d.h.: das Gleichungssystem muß mindestens eine Lösung (x_0, y_0) mit $x_0^2+y_0^2 \leq 1$ besitzen. - Ähnliche Überlegungen verwendet man bei Systemen

von Differentialgleichungen u.a.m. So liefert die Topologie z.B. Existenzsätze für Lösungen von schwierigen Differentialgleichungen und von Systemen mehrerer Differentialgleichungen (ein Gebiet, das mit dem alten Schlagwort von der "Geometrie auf der Gummihaut" überhaupt nicht mehr erfaßt wird! Allenfalls kann man dieses Schlagwort ersetzen durch "Geometrie der Mannigfaltigkeiten", wobei sich die ("kombinatorische") Topologie der Flächen als Spezialfall unterordnet und das Wort "Geometrie" im allgemeinsten Sinn als Lehre von den "räumlichen Eigenschaften" aufgefaßt werden muß. Freilich wird in diesem Sinn "Geometrie" eher durch "Topologie" erklärt als umgekehrt).

Zu bemerken ist hier ferner, daß der Beitrag der Topologie zur Analysis im weitesten Sinn nicht nur im Bereitstellen der Grundlagen oder - wie eben erwähnt - von Existenzsätzen besteht. Verfeinerungen topologischer Fixpunktsätze eröffnen in Verbindung mit der ebenfalls bereits erwähnten Approximationstheorie auch Möglichkeiten einer (schrittweisen) Berechnung von Lösungen komplizierter Gleichungssyteme oder einer Differentialgleichung.

nämlich

Erhalten wir durch den Brouwerschen Fixpunktsatz stets nur Existenzaussagen, so gibt es auch Fixpunktsätze (anderen Typs), welche sogar die schrittweise (= näherungsweise) Berechnung von Lösungen gewisser Gleichungen und Gleichungssysteme ermöglichen. (Siehe z.B. den "Banachschen Fixpunktsatz".) Die allgemeine Theorie der Fixpunktsätze ist ein interessantes Teilgebiet der Topologie mit vielfachen Anwendungen, z.B. auch in der numerischen Mathematik.

Wir haben eben von "schrittweisen" Berechnungen (Näherungslösungen) gesprochen und damit bereits ein Gebiet berührt, das als fundamentales Konzept der Topologie von mindest ebenso zentraler Bedeutung ist wie die Stetigkeit. Gemeint sind alle "Konvergenzphänomene".

Im nächsten Kapitel soll dieser Themenkreis angerissen werden, der - wie die mit ihm verwandte Stetigkeit - ebenfalls zu den Grundelementen der Topologie gehört:

§ 3. KONVERGENZ

Eine Folge (a_n) reeller Zahlen konvergiert bekanntlich dann gegen $a \in R$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N gibt, so daß für alle späteren Indizes $n > N$ gilt: $|a - a_n| < \varepsilon$. Anders formuliert:

Definition 7: Die Folge (a_n) konvergiert gegen a, wenn in jeder ε-Umgebung $U_\varepsilon(a)$ alle - ausgenommen höchstens endlich viele - Folgenglieder liegen.

Diese Formulierung enthält nur Begriffe, die in jedem metrischen Raum (X,d) zur Verfügung stehen. Metrische Räume geben somit offensichtlich einen für eine Exaktifizierung des "Konvergenzbegriffes" gut geeigneten Rahmen ab. Tatsächlich läßt sich auch die in § 2 als Definition 1 festgehaltene Eigenschaft stetiger Funktionen für beliebige metrische Räume formulieren. Besonders interessant wird der Konvergenzbegriff, wenn wir ihn in sogenannten Funktionenräumen studieren, also in (metrischen) Räumen, deren Elemente selbst Funktionen sind. Etwa: den Raum $C([0,1])$ von Beispiel F:

Man verifiziere an Hand des Beispiels F: Eine Folge stetiger Funktionen (f_n), $f_n \in C([0,1])$, konvergiert bezüglich der in diesem Raum herrschenden Metrik d genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index N existiert, so daß für alle $n > N$ und alle $x \in [0,1]$ gilt: $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Also kurz: genau dann, wenn die Folge (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert. Die in Beispiel F beschriebene Metrik heißt daher auch die "Metrik der gleichmäßigen Konvergenz". - Den oben zitierten Satz von Weierstraß könnte man nun also so formulieren: jede stetige Funktion f auf $[0,1]$ ist Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von Polynomen p_n auf $[0,1]$. Der topologische Hintergrund: ist Y eine dichte Teilmenge eines metrischen Raumes X, so läßt sich jedes Element $x \in X$ als Grenzwert einer Folge (y_n) von Elementen aus Y darstellen. (Vgl. reelle und rationale Zahlen!). - Dies nur, um ein weiteres, letztes Beispiel eines für die Topologie typischen - allerdings fast trivialen - Satzes anzuführen.

§ 4. TOPOLOGISCHE RÄUME

Wenn auch metrische Räume ein für die Exaktifizierung des Stetigkeits- und Konvergenzbegriffes sehr gut geeignetes Begriffssystem bilden, so reichen sie doch nicht aus, um z.B. alle "Konvergenzphänomene" zu beschreiben. So ist es z.B. nicht möglich, die aus der Analysis wohlbekannte punktweise Konvergenz reeller Funktionen mit Hilfe einer Metrik zu beschreiben. Auch aus vielen anderen Gründen war es zweckmäßig, noch allgemeinere Rahmen für eine Exaktifizierung des Stetigkeits- und Konvergenzbegriffes zu erfinden. Der wichtigste darunter ist der Begriff und die Theorie der topologischen Räume, die für viele Mathematiker den "eigentlichen" Inhalt der Topologie bilden. Wir wollen die Grundidee an Hand der Konvergenzdefinition 7 kurz skizzieren: um die Konvergenz einer Folge zu beschreiben, benützten wir dort den Begriff der ε-Umgebung. Statt dessen hätten wir natürlich auch beliebige Umgebungen U(a) im Sinne von Seite 9 , Zeile 24 verwenden können. Wenn es nun gelingt, die wesentlichsten Eigenschaften des Umgebungsbegriffes einzufangen, <u>ohne</u> den Begriff einer Metrik zu verwenden, könnten wir auch "Konvergenz" ohne Zuhilfenahme von Distanzfunktionen beschreiben. Und das gelingt tatsächlich. (Man überzeuge sich, daß die folgenden zur Definition topologischen Räume benützten Eigenschaften jedenfalls von den ε-Kugeln in metrischen Räumen erfüllt sind. Die Theorie zeigt sogar, daß es - aus topologischer Sicht - gerade die wichtigsten ihrer Eigenschaften sind.) Damit ist dann - um es vorweg zu nehmen - gezeigt, daß jeder metrische Raum erst recht ein topologischer Raum ist. Die Umkehrung gilt nicht, es handelt sich also um eine <u>echte Verallgemeinerung</u>.

<u>Definition 8:</u> Gegeben sei eine Menge X, und jeder Punkt $p \in X$ besitze eine Familie von Mengen $U(p) \subset X$, die alle p enthalten und die wir (Basis-) <u>"Umgebungen von p"</u> nennen werden, so daß folgende Eigenschaften erfüllt sind: (1) der Durchschnitt je zweier Umgebungen $U(p) \cap V(p)$ enthält eine (kleinere) Umgebung $W(p)$; und (2) zu jedem $U(p)$ gibt es eine (eventuell kleinere) Umgebung $V(p)$, so daß $U(p)$ für jedes $y \in V(p)$ eine ganze Umgebung $U(y)$ enthält. (Skizze!) Schließlich soll X selbst Umgebung jedes Punktes sein. Dann nennen wir X einen <u>topologischen Raum</u>. Das ist also eine Menge, in der jeder Punkt eine Familie von Umgebungen besitzt. Paradebeispiel - wie gesagt - metrische Räume: als (Basis-) Umgebungen in obigem Sinn brauchen wir nur z.B. die ε-Kugeln um p zu verwenden. Die Eigenschaft (1) ist dann trivialerweise erfüllt, weil die ε-Kugeln um jeden Punkt p ja totalgeordnet sind. (Das muß i.a. nicht der Fall sein!). Um (2) zu zeigen, verwende man für $U(p)$ eine ε-Kugeln, $V(p)$ die $\varepsilon/3$-Kugel um p und für $U(y)$ die $\varepsilon/3$-Kugel um y.

Der Umgebungsbegriff gestattet es nun, in topologischen Räumen sinnvoll von "Konvergenz" zu sprechen (vgl. Definition 9).

<u>Definition 9:</u> Gegeben sei ein topologischer Raum X. Eine Folge (x_n) konvergiert gegen $x \in X$ genau dann, wenn in jeder Umgebung $U(x)$ alle - ausgenommen höchstens endlich viele - Folgenglieder liegen.

<u>Beispiele:</u> In metrischen Räumen reduziert sich diese Definition auf die bereits behandelte. Ein weiteres Beispiel soll zeigen, daß obige Definitionen leider noch nicht genau das treffen, was wir uns unter "Konvergenz" vorstellen. Zusätzliche Einschränkungen sind nötig. Sei z.B. $X = \mathbb{N}$, die Menge der natürlichen Zahlen, als Umgebungen $U(n)$ eines "Punktes" $n \in \mathbb{N}$ sollen alle Teilmengen fungieren, die n und alle anderen - ausgenommen höchstens endlich viele - natürlichen Zahlen $m \neq n$ enthalten. (Man zeige, daß (1), (2) in Definition 8 erfüllt sind, daß also die Menge $\mathbb{N}$ mit diesem Umgebungsbegriff ein topologischer Raum ist. Sehen wir uns nun eine spezielle Folge an, z.B. (1,3,5,7,...). Diese Folge konvergiert im Sinne von Definition 9 und in Bezug auf den vorgelegten - vielleicht etwas unanschaulichen - Umgebungsbegriff gegen z.B. $n = 5$, aber auch gegen jede andere Zahl! (Wieso?) Solche Pathologien sollten aber nicht auftreten. Der typische Weg, dies zu vermeiden, ist die Einschränkung der Definition durch eine weitere Eigenschaft. Fügt man z.B. der Definition topologischer Räume noch ein sogenanntes "Trennungsaxiom" (3) hinzu, so erhält man sogenannte Hausdorff-Räume, in welchen eine konvergente Folge tatsächlich nur gegen genau einen Grenzwert streben kann.

(3): Je zwei verschiedene Punkte besitzen disjunkte Umgebungen.

Metrische Räume sind Spezialfälle davon. Klar: für zwei Punkte mit der Entfernung ε nehme man als Umgebungen z.B. die $\varepsilon/3$-Kugeln!

Ein wichtiger Gegenstand der Topologie ist nun die Untersuchung topologischer Räume, wobei für verschiedene Probleme noch weitere einschränkende Axiome hinzugenommen werden. Man hat dann viele Typen von topologischen Räumen vor sich (z.B. kompakte Räume, zusammenhängende Räume, usw.), die vielfältige und weitgestreute Anwendungen gestatten. -
Abschließend möge die entsprechende Stetigkeitsdefinition, also die Exaktifizierung im Rahmen der topologischen Räume zu unserem Ausgangspunkt zurückführen. (Vgl. Satz 1 und die dort folgenden Bemerkungen!)

Definition 10: Eine Abbildung f von einem topologischen Raum X in einem topologischen Raum Y heißt stetig bei $x_0 \in X$, wenn für jede Umgebung $U(f(x_0))$ eine Umgebung $V(x_0)$ existiert, so daß für alle $x \in V(x_0)$ gilt: $f(x) \in U(f(x_0))$.

Schlußbemerkung: Wie schon in der Einleitung betont, ist eine scharfe Abgrenzung eines mathematischen Gebietes von den anderen kaum möglich. So bekommt z.B. die Theorie der topologischen Räume einen besonders wichtigen Stellenwert in Verbindung mit algebraischen Strukturen: topologische Gruppen und topologische Vektorräume (also topologische Räume mit einer zusätzlichen algebraischen Struktur) bilden heute die Grundlage der modernen Analysis. Topologische Methoden können auch in anderen Gebieten, z.B. der Algebra, so auftreten, daß man den resultierenden Sätzen ihren eigentlichen topologischen Charakter gar nicht mehr ansieht. So ist z.B. der Beweis des offenbar "algebraischen" Satzes, daß es außer für $n = 1,2,4,8$ in keinem $\mathbb{R}^n$ eine Möglichkeit gibt, eine nullteilerfreie, bilineare Multiplikation $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ zu definieren, bisher nur mit topologischen Methoden gelungen. (Im $\mathbb{R}^1$ bzw. $\mathbb{R}^2$ ist das bekanntlich die übliche reelle bzw. komplexe Multiplikation, im $\mathbb{R}^4$ die nicht-kommutative Quaternionen-Multiplikation bzw. im $\mathbb{R}^8$ die Cayley'sche Multiplikation.)

Das Wort "Topologie" wird in der Mathematik auch noch in einem anderen Sinn verwendet: nennen wir eine Teilmenge O eines topologischen Raumes X offen, wenn O mit jedem Punkt $x \in O$ auch noch eine ganze Umgebung $U(x)$ enthält, so kann man die Familie aller offenen Mengen in X betrachten. Diese Familie heißt oft "die Topologie von X". (Warum ist ein Intervall $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ nicht offen im Raum der reellen Zahlen? Warum ist eine Kreisscheibe mit Rand nicht offen in $\mathbb{R}^2$? - Man betrachte Randpunkte!) - Es ist wichtig zu wissen, daß unsere Definition 8 nicht die einzig mögliche ist. So ist es z.B., wenn auch unanschaulicher, so doch technisch einfacher, topologische Räume zu definieren, indem man axiomatisch festlegt, was man unter "offenen" Teilmengen der Grundmenge X versteht. Der Begriff der Umgebung tritt dann also nicht primär auf, er kann dann aber in weiterer Folge mittels offener Mengen festgelegt werden und steht so letztlich auch zur Verfügung. - Doch sollte man sich - etwa bei Lektüre eines Buches oder im Unterricht - durch derartige axiomatische Fragen den Blick aufs Wesentliche nicht verlegen, so wichtig sie auch an sich sein mögen. Topologie ist wahrlich mehr als systematische Umformung von Axiomen.

§ 5. Marginalien zur schulpraktischen Relevanz*):

Die Frage, ob und wie Topologie zum Gegenstand des Mathematikunterrichtes gemacht werden soll, wurde vielfach - auch in "Der Mathematisch-Naturwissenschaftliche Unterricht" - behandelt. Das Spektrum der Vorschläge reicht von einem schlichten "Nein" bis zu detailliert axiomatisch ausgearbeiteten Leistungskursen und Unterrichtsvorschlägen, die vielleicht schon große Teile einer Hochschulvorlesung abdecken. Andererseits wird vielfach schon dann von "Topologie" gesprochen, wenn es bloß um die Behandlung von offenen und geschlossenen Linien oder z.B. von einfach oder nicht-einfach durchlaufbaren Netzen im Primarstufenunterricht geht. So sehr dies im weitesten Sinn gerechtfertigt erscheinen mag, so sehr sollte man andererseits auch mit dem Gebrauch des Begriffes Topologie im MU sparsam umgehen. Eine Fixierung auf die trivialsten Aspekte der Topologie bei den Schülern könnte die Folge sein, zumal der allergrößte Prozentsatz der Schulabgänger später kaum noch wirklich relevante Dinge über Topologie lernen wird.

In welcher Weise soll aber Topologie im MU überhaupt zum Tragen kommen?
Implizit wird diese Frage in den voranstehenden Abschnitten bereits behandelt. Eine stichwortartige und unvollständige Zusammenfassung könnte wie folgt lauten:

1. Im hergebrachten Stoffkanon des MU finden sich (seit jeher) viele "topologische" Begriffe, Sätze und Sichtweisen. (Z.B. Stetigkeit, Grenzwerte, topologische Aspekte der Geometrie u.a.). Es sollte dem Lehrer gelingen, das "Topologische" daran herauszuarbeiten ohne es in das Korsett der toplogischen Axiomatik zu pressen. (§§ 1-3) Allein die korrekte Verwendung des Wortes "Umgebung" - ohne diesen Begriff abstrakt zu definieren - kann hier vieles leisten. Der Schüler sollte - etwa am Ende eines Leistungskurses über Geometrie oder/und Analysis - ungefähr wissen bzw. "spüren", was ein "topologischer" Satz oder Begriff - ist und wodurch er sich etwa von einem "algebraischen" unterscheidet. (§ 2) Die vorzeitige Konfrontation mit einer "topologischen Axiomatik" kann hier genau das Gegenteil erreichen. Wahrscheinlich kann auf axiomatische Definition en der Topologie im MU überhaupt verzichtet werden.**)

2. Einer Exaktifizierung etwa des Grenzwertbegriffes durch den seinerseits bereits "exaktifizierten" Umgebungsbegriff sollte die <u>sprachliche Beherrschung</u> auf der intuitiven Ebene vorangehen. Analoges gilt für den Stetigkeitsbegriff und für alle anderen topologischen Begriffe im MU.

3. Eine Art "höchstes" (Lehr-)Ziel könnte die Einsicht in die <u>Notwendigkeit</u> von (bzw. der Wunsch nach) Exaktifizierungen topologischer Begriffe bilden (§ 1), kaum aber die Präsentation fertiger Systeme derartiger Exaktifizierungen. In diesem Sinn eignet sich

---

*) Das Wort "Marginalien" ist mit Absicht gewählt. Dieser Abschnitt kann vielleicht die §§ 1-4 ergänzen, er stellt jedoch <u>keine</u> didaktische Analyse zum Thema "Topologie im MU" dar!

**) Freilich darf diese Frage nicht durch einfache Behauptungen dieser Art entschieden werden. Der Fragenkomplex "Topologie im MU" ist keineswegs abgeschlossen und bedarf noch mancher didaktischer Analyse!

z.B. der Umgebungsbegriff hervorragend, jedenfalls wesentlich besser als die Begriffe "offene" und "abgeschlossene Menge" (vgl. die Fußnote auf Seite 1).

4. Im Sinne des genetischen Unterrichtsprinzips ist von einem intuitiv anschaulich erfaßbaren und als bedeutsam erkannten Begriff auszugehen. Für den Unterricht topologischer Sichtweisen und Konzepte im MU eignet sich hiezu der Stetigkeitsbegriff wahrscheinlich besser als der Konvergenzbegriff. Dementsprechend sind auch die Kapitel 1 - 4 abgefaßt. Ein dieser Linie folgender Einstieg im MU kann - ausgehend von anschaulichen und durchaus "klassischen" Problemen - auch schon durch wenige Andeutungen sinnvolle Einsichten in den Problemkreis "Was ist Topologie?" liefern. Für Zugänge, z.B. über den Begriff der offenen Menge oder für geometrisch orientierte Zugänge zur Topologie gilt dies in weit eingeschränkterem Maß.

5. Topologische Aspekte des MU müssen nicht auf die Analysis beschränkt bleiben, obwohl sie hier - soweit es den MU betrifft - ihre wesentliche Bedeutung entfalten. Bei aller "Schönheit" des Gegenstandes bleibt doch z.B. die Eulersche Polyederformel im MU auf einer (fast möchte ich sagen) spielerischen Stufe. Natürlich kann andererseits gerade das <u>für</u> die Aufnahme in den Stoffkanon sprechen. Analoges gilt ebenso für andere "punktuelle" Themen der Topologie.

6. Wenn für eine <u>explizite</u> Aufnahme von Topologie in den MU plädiert wird, muß dies mit "didaktischen " Argumenten geschehen, die Bemerkung, topologische Begriffe und Methoden seien "überall" und zumal in der "modernen" Mathematik von Bedeutung, erscheint in einer Zeit, in der von einem unangefochtenen "Glauben" an die Mathematik nicht mehr gesprochen werden kann, kaum mehr zugkräftig. Gerade deshalb aber ist es das Ziel des vorliegenden Artikels, sich mit der Stellung der Topologie im Rahmen der neueren Mathematik auseinanderzusetzen und sozusagen eine Momentaufnahme für die Beantwortung der Frage "Was ist Topologie?" zu umreißen. (In wenigen Jahrzehnten mag die Frage freilich völlig anders beantwortet werden müssen).

<u>LITERATUR</u>:

[1] J. Cigler und H.-Ch. Reichel: Topologie, eine Grundvorlesung; Bibl. Inst. Mannheim, 1978 (B.I.-Hochschultaschenbuch 121). - (Inkl. ausführlicher Bibliographie)

[2] R.Courant und H. Robbins: Was ist Mathematik; Springer 1962(engl.1941)

[3] L. Gårding: Encounters with Mathematics; Springer 1977

[4] J.H. Mannheim: The genesis of point set topology; Pergamon Press, Oxford 1964. - (Betrifft die "Vorgeschichte" der Topologie)

[5] K.P. Müller und H. Wölpert: Anschauliche Topologie; Teubner, Stuttgart 1976; Reihe: "Mathematik Lehrerausbildung"

[6] H.-Ch. Reichel: Zur Entwicklung der Dimensionstheorie; ersch. in "Math.Phys. Semesterberichte" 1979/80.

[7] H. Schwegler und W. Bächtle: Die Katastrophentheorie, mathematische Modelle für Grenzsituationen; Bild der Wiss. 1978, 130 ff.

Abbildung zu Seite 141

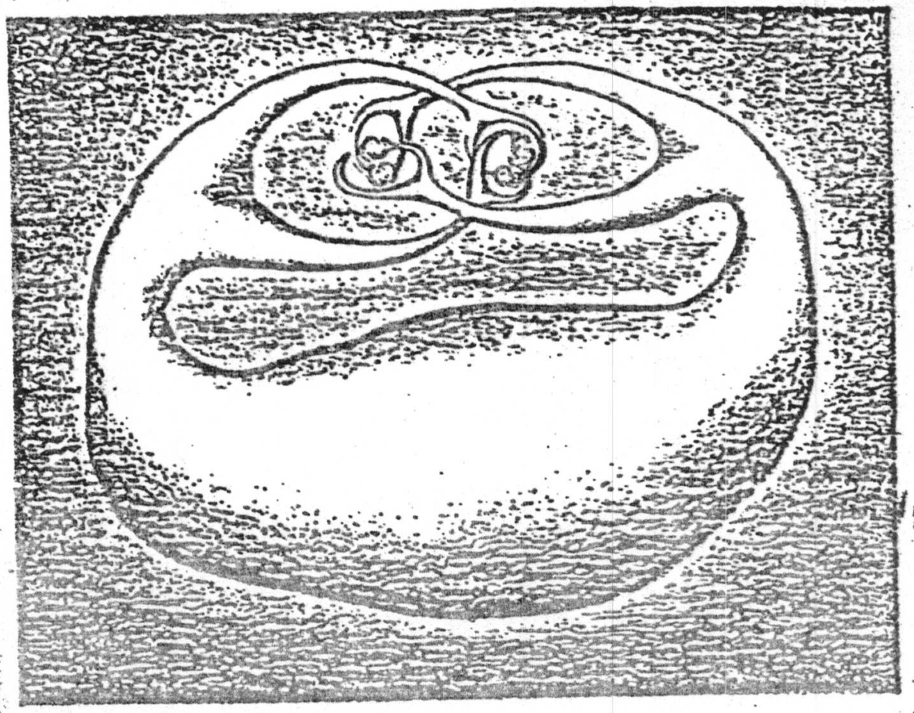


Fig. : Alexander's "gehörnte Sphäre"

Abb. aus J.G. Hocking und G.S. Young: Topology, Addison - Wesley, London, 1961

A.o.Univ.-Prof.Dr.Hans-Christian Reichel
Institut für Mathematik der
Universität Wien
1090 Wien 9., Strudlhofgasse 4
Österreich